14.1.19

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, παρ/μες, με $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ $\exists$ $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Αν $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν το $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει $\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\exists$

$g'(\xi) = 0$, αλλά $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b) \setminus \{\xi\}$
$(\xi \in (a,b))$

Εφαρμόζεται το Θεώρημα

Δεν εφαρμόζεται όταν $\exists \{\xi_n\} \subseteq (a,b)$ τω. $\xi_n \to a$ κ' $g'(\xi_n) = 0$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\varepsilon > 0$ (Θεωρούμε $l \in \mathbb{R}$

Δείξαμε ότι $\exists$ $\delta_1 > 0$ τω. $\forall x \in (a, a+\delta_1)$ να ισχύει $\frac{(l-\varepsilon)(g(x) - g(x_0)) + f(x_0)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{(l+\varepsilon)(g(x) - g(x_0)) + f(x_0)}{g(x)}$, όπου $\exists \delta > 0$, τω.

$\forall x \in (a, a+\delta)$, $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$ κ' $x_0 \in (a, a+\delta)$

σταθερό

Έστω $\{x_n\} \subseteq (a,b)$ τω. $x_n \to a$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$, $x_n \in (a, a+\delta_1)$

Έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty \Rightarrow$

$\forall \varepsilon >$

$$l-\varepsilon \leq \liminf \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) \leq \limsup \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) \leq l+\varepsilon \Rightarrow$$

$$l \leq \liminf \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) \leq \limsup\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) \leq l \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l \xrightarrow[\text{τυχαία}]{\{x_n\}} \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

<u>Παράδειγμα</u>

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0 \quad (a>0) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(x^a)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^a} = 0$$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x^a)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{ax^{a-1}} \quad (\text{ίδιας μορφής})$$

Θέτω $n = [a]+1 \Rightarrow a < n \Rightarrow x^a \leq x^n \Rightarrow$

$$\frac{e^x}{x^a} \geq \frac{e^x}{x^n}, \quad x \geq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)^n}{(x^n)^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)^{(n-1)}}{(x^n)^{(n-1)}} = \infty$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \to \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(x)$ $\quad (0(-\infty))$ $\quad (a>0)$

$=$

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(x)}{\frac{1}{x^a}}$ $\quad \left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^a}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-ax^{a-1}}{x^{2a}}} =$

$\lim_{x\to 0^+} (-ax^a) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} (x^2)^x = 1$ $\quad (0^0)$

$\lim_{x\to 0^+} \log((x^2)^x) = \lim_{x\to 0^+} 2x \log x = 0$

Επειδή η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι συνεχής

$\lim_{x\to 0^+} f(\log(x^2)^x) = f(\lim_{x\to 0^+} \log(x^2)^x) = f(0) = e^0 = 1$

<u>Παράδειγμα</u>

$\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ $\quad (\infty-\infty)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$ $\quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin^2 x - x^2)'}{(x^2 \sin)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin(2x)} - 2x}{2x\sin^2 x + 2x^2 \sin x\cos x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{2x\sin^2 x + x^2 \sin 2x}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin^2 x - 2x)'}{(2x\sin^2 x + x^2 \sin 2x)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x - 2}{2\sin^2 x + \underset{2x\sin 2x}{4x\sin x\cos x} + *} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$*\ 2x\sin 2x + 2x^2 \cos 2x$

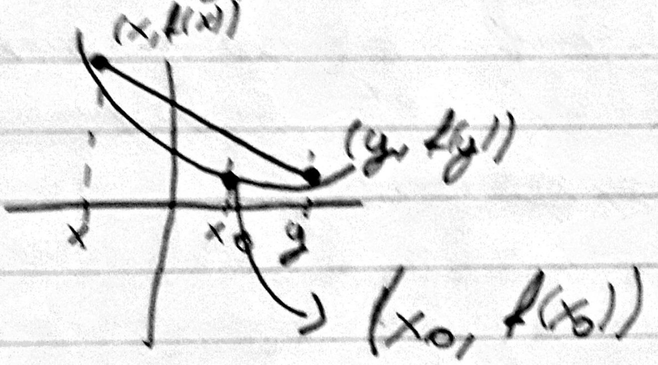
$$\lim_{x\to 0} \frac{(2\cos 2x - 2)'}{(2\sin^2 x + 2x\sin 2x + 2x\sin^2 x + 2x^2\cos 2x)'}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{4\cos 2x + 8x\cos 2x - 8x^2\sin 2x + 2\sin^2 x + 4x\cos 2x}$$

$= 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0$$

Κυρτές κ' κοίλες συναρτήσεις $f: I$ (διάστημα) $\to \mathbb{R}$
κυρτή αν $\forall x, y \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$ ισχύει
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ ($\geq$: κοίλη)
($\Leftrightarrow$) f κοίλη αν f κυρτή



$$x_0 = \lambda x + (1-\lambda) y$$
$$\lambda = \frac{y - x_0}{y - x}$$
$$1 - \lambda = \frac{x_0 - x}{y - x}$$

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{yx - x_0 x + x_0 y - yx}{x+y} = x_0$$

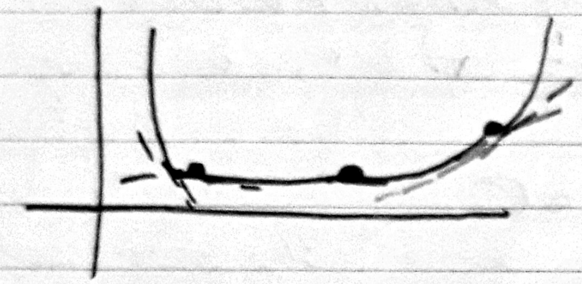
<u>Παράδειγμα</u>

$f(x) = |x|$ κυρτή στο $\mathbb{R}$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in (0,1)$
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = |\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y|$
Αλλά f όχι παραγ. στο $x = 0$ $\quad = \lambda|x| + (1-\lambda)|y|$
$\quad = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Θεώρημα

Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, κυρτή. Τότε $\forall\, x\in(a,b)$ $\exists$ οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ κ' $\forall\, y\in(x,b)$

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)$$



Όσο πάμε προς τα δεξιά μεγαλώνει η κλίση

Πόρισμα 1

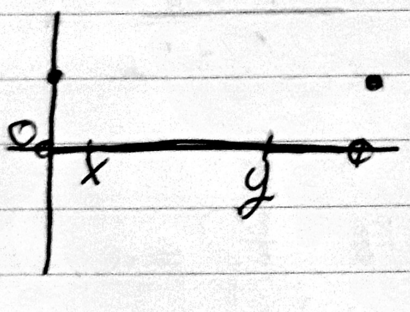
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ κυρτή $\Rightarrow$ f συνεχής στο (a,b)

Απόδειξη

Έστω $\xi\in(a,b)$, $\exists\, f'_-(\xi) \Rightarrow f$ εξ αριστερών συνεχής στο ξ, $\exists\, f'_+(\xi) \Rightarrow f$ εκ δεξιών συνεχής στο ξ $\Rightarrow f$ συνεχής στο ξ

Παράδειγμα

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}1, & x=0 \text{ ή } x=1\\ 0, & x\in(0,1)\end{cases}$



Έστω $0\le x<y\le 1$, $\lambda\in(0,1)$

Θδο $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

$\lambda x+(1-\lambda)y\in(x,y) \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\ne 0,1$

$\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y)=0\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

Πόρισμα 2

Αν f παρ/μη στο (a,b) κ' κυρτή $\Rightarrow f':(a,b)\to\mathbb{R}$ αύξουσα

Απόδειξη

Έστω $a<x<y<b \Rightarrow \underbrace{f'_-(x)}_{=f'(x)} \le f'_+(y) = f'(y)$

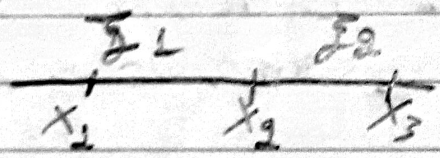
Πόρισμα 3

Αν f δύο φορές παρ/μη στο (a,b) και κυρτή τότε $f''(x)\ge 0,\ \forall x\in(a,b)$

Θεώρημα

Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, παρ/μη τω $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ να είναι αύξουσα. Τότε η f είναι κυρτή.

Απόδειξη



Έστω $a<x_1<x_2<x_3<b$

Από ΘΜΤ, $\exists\ \xi_1\in(x_1,x_2)$, $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τω $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$

$\lambda=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$

$1-\lambda=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$

$$f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\Rightarrow (x_3-x_2)(f(x_2)-f(x_1)) \le (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_2))$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}}_{\lambda}\cdot(f(x_2)-f(x_1)) \le \underbrace{\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}}_{1-\lambda}(f(x_3)-f(x_2))$$

$\Rightarrow \lambda f(x_2) - \lambda f(x_1) \leq (1-\lambda) f(x_3) - (1-\lambda) f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$

$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$

$\forall\ a < x_1 < x_3 < b \quad , \forall \lambda \in (0, 1)$